Методы прямого численного моделирования крупномасштабной турбулентности, описывающие во времени все детали эволюции поля скорости и скалярных полей для большинства практических задач не приемлемы в силу потребности больших ресурсов вычислительных средств и дороговизны расчетов. В настоящее время существует единственный экономически оправданный выход, решать уравнения осредненного движения, которые определяют распределение осредненных во времени величин. Для изучения турбулентных течений, необходимо получить осредненное уравнение Рейнольдса из уравнений Навье-Стокса, и вывести основные уравнения для тензоров турбулентных напряжений. Турбулентность представляет собой сложное физическое явление, теоретическое изучение которого опирается на основные законы физики, находя свое выражение в уравнениях гидродинамики. Для несжимаемой жидкости, движущейся в изотермических условиях, они сводятся к уравнениям баланса количества движения (импульса) и закону сохранения вещества, которые, записываются в виде:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_k \partial x_k} + F_i$$

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0 \qquad (1.1)$$

Система уравнении записаны в декартовой системе координат x_i (i =1, 2, 3), три компонента скорости U_i и давление P являются неизвестными функциями, определяются из системы четырех дифференциальных уравнений (1.1). τ - время, ν - кинематическая вязкость среды, ρ - плотность среды, F_i- некоторая объемная сила, действующая на среду, и далее опускаем ее в общей части и вернемся к ней в решений конкретных задач. В уравнениях (1.1) и ниже по повторяющимся индексам следует производить суммирование. Приведенные нестационарные уравнения Навье-Стокса, как известно, описывают реальные течения жидкостей до чисел Рейнольдса меньше критических (ламинарное течение) . При дальнейшем увеличении числа Re (в переходном режиме) из уравнения (1.1) также можно извлечь информацию о закономерности развития течения. Однако при развитом турбулентном течении возникают принципиальные трудности, которые делают неприменимым использование прямого численного моделирования для изучения реальных турбулентных течений. Характерной особенностью турбулентного движения является наличие беспорядочных флуктуаций гидродинамических характеристик потока во времени и в пространстве. Хотя неупорядоченность, хаотичность является основным признаком турбулентного движения, в нем тем не менее оказывается возможным выделить точные средние значения различных величин (скорости, давления и т.п). Поэтому в настоящее время можно придерживаться следующего определения турбулентности, что турбулентное движение жидкости предполагает наличие неупорядоченности течения, в котором различные величины претерпевают хаотическое изменение по времени и пространственным координатам и при этом могут быть выделены статистически точные их средние значения. При изучении турбулентности в силу его определения необходимо использовать какие-либо методы осреднения, позволяющие перейти от исходных гидродинамических уравнений, описывающих мгновенные значения гидродинамических элементов к более плавным и регулярным средним значениям характеристик потока, которые можно исследовать с помощью обычных методов математического анализа. Для вычисления средних значений обычно используются временное или пространственное осреднения по какому-либо промежутку времени или области пространства или пространственно-временное осреднение. Исходя из того требования, что применение рассматриваемого осреднения к дифференциальным уравнениям гидродинамики позволило бы получить достаточно простые уравнения относительно средних значений полей. О. Рейнольдс использовал простейшее осреднение по временному интервалу. Регистрируя во времени в данной точке потока какой-либо из параметров, характеризующих течение, можно положить:

$$G = \overline{G} + f$$

где G - действительно существующее в потоке мгновенное (актуальное) значение этой величины; $\overline{G}$ - осредненное по времени его значение; f - пульсационное значение. Под обозначаемым $\overline{G}$ подразумевается обычное интегральное среднее по времени τ за промежуток времени T, называемым периодом осреднения

$$\overline{G} = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} G \, d\tau$$

Предполагается, что для каждого турбулентного движения существует такой достаточно большой по сравнению с периодом турбулентных пульсаций, но малый по сравнению с характерным для осредненного турбулентного движения интервалом времени постоянный период осреднения Т, что сглаживание во времени приводит к осредненной величине, при повторном сглаживании уже не изменяющейся. Это значит, что

$$\overline{\overline{G}} = \overline{G}$$

Если в результате осреднения, проведенной в данной точке в разные моменты времени τ, будут получаться одни и те же значения $\overline{G}$, очевидно что осредненное значение пульсационных величин $\overline{f}$ равно нулю

$$\overline{f} = 0$$

Осреднения по времени, используемые ниже, должны подчиняться правилам:

$$\overline{G+Y} = \overline{G} + \overline{Y}, \quad \overline{G\overline{Y}} = \overline{G}\,\overline{Y}, \quad \overline{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial G}{\partial \tau}} = \frac{\partial \overline{G}}{\partial \tau} \qquad (1.2)$$

Перейдем к выводу уравнений Рейнольдса для осреднений скорости. Представим актуальные значения скорости U_i и давления P в виде суммы осредненных $\overline{U_i}$, $\overline{P}$ и пульсационных величин u_i, p

$$U_i = \overline{U_i} + u_i \qquad P = \overline{P} + p \qquad (1.3)$$